PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG 19.06.2018

2ª parte do exame EN

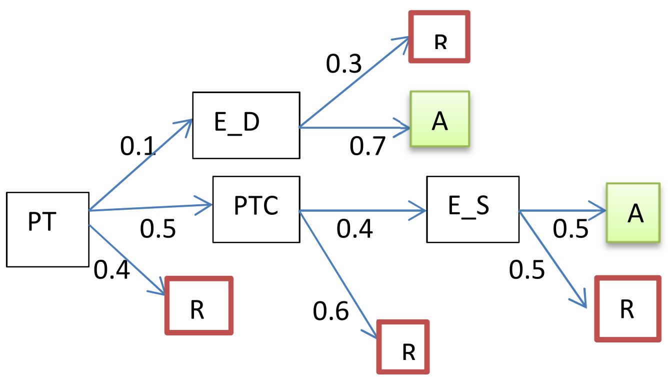
Nome:____ **Número:**_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1. (10)	**2a. (15)**	**3a.(10)**	**4.a (25)**	**5. (10)**
	2b. (10)	**3b.(15)**	**4.b (5)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[10]** O processo de selecção para determinada função é feito ao longo de várias fases. Num primeiro tempo realiza-se um teste técnico onde o candidato pode passar com distinção (probabilidade de 0.1), pode passar sem distinção (probabilidade de 0.5) ou pode falhar. Se falhar é eliminado, se passar com distinção passa para a ultima fase que é uma entrevista e se passar sem distinção tem de fazer uma prova técnica complementar onde passa com probabilidade 0.4. Se passar na prova complementar segue para entrevista (caso contrário está eliminado). Na entrevista, quem acedeu sem prova complementar tem uma probabilidade de sucesso de 0.7 e quem acedeu através da prova complementar tem uma probabilidade de sucesso de 0.5. Qual a probabilidade de um candidato ser aceite?
   1. Sejam os acontecimentos
      PT – realizar a prova técnica; PTC – realizar a prova complementar; E_D e E_SD – Realizar a entrevista tendo passado na PT com distinção ou sem distinção respectivamente. Finalmente A corresponde a ser aprovado e R a não ser aprovado;



$$P(A)=0.1\times 0.7+0.5\times 0.4\times 0.5=0.07+0.10=0.17$$

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

   a. **[15]** Verifique que $F_X(x)$ pode ser considerada uma função de distribuição e obtenha o 1º quartil da variável X .

Para que $F_X(x)$ seja considerada uma função de distribuição têm de verificar-se 3 condições:

- $F_X(x)$ não decrescente – o que se verifica facilmente considerando que a função é contínua com derivada não negativa em qualquer dos troços;
- $F_X(-\infty)=0$ e $F_X(+\infty)=1$ – óbvio
- $F_X(x)$ contínua à direita –

Seja q o 1º quartil. Então $F_X(q)=0.25$ e $q\in[0;1)$ já que $F_X(0)=0$ e $F(1)=0.5$. Assim q será solução da equação $q^2/2=0.25$ com $0\le q<1$, vindo $q=\sqrt{0.5}$

b. **[10]** Obtenha a função de distribuição de $Y=X/2$.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X/2\le y)=P(X\le 2y)=F_X(2y)$ donde

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 2y^2 & 0\le y<1/2\\ 4y-2y^2-1 & 1/2\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função de probabilidade:

x\y	0	1	2	3
1	0.05	0.10	0.15	0.15
2	a	0.08	b	$2b$
3	0.06	a	0.15	0.10

a. **[10]** Obtenha os valores das constantes a e b, sabendo que $P(Y>0)=0.87$ e calcule $P(Y>1\mid X\le 2)$.

Sabe-se que $1=\sum_{x,y} f(x,y)\Leftrightarrow 1=2a+3b+0.84\Leftrightarrow 2a+3b=0.16$ e que $0.87=P(Y>0)=a+3b+0.73\Leftrightarrow a+3b=0.14$. Resolvendo vem $a=0.02$ e $b=0.04$.

$$P(Y>1\mid X\le 2)=\frac{P(Y>1\wedge X\le 2)}{P(X\le 2)}=\frac{0.30+3b}{0.53+a+3b}=\frac{0.42}{0.67}\approx 0.6269$$

b. **[15]** Calcule $\operatorname{cov}(X,Y)$. Será que este resultado lhe permite concluir sobre a eventual independência entre X e Y?

$$E(X)=1\times 0.45+2\times(a+3b+0.08)+3\times(0.31+a)=1.54+5a+6b=1.88$$
$$E(Y)=1\times(0.18+a)+2\times(0.3+b)+3\times(0.25+2b)=1.53+8b+a=1.87$$
$$E(XY)=1\times 0.1+2\times 0.15+3\times 0.15+2\times 0.08+4b+12b+3a+6\times 0.15+9\times 0.10$$
$$=2.81+16b+3a=3.51$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=3.51-1.87\times 1.88=-0.0056$$

Sim, a covariância não sendo nula, as variáveis não podem ser independentes.

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade dada por

$$f(x,y)=\frac{3}{17}x\,y,\ 0<x<2,\ 0<y<x+1.$$

a. **[25] O**btenha as funções densidade marginais de X e de Y e calcule $E\left(\frac{1}{XY}\right)$. Escreva (não precisa de efectuar os cálculos) o integral necessário para obter $P(1<X<Y)$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{x+1}\frac{3}{17}xy\,dy=\frac{3x}{17}\left(\frac{y^2}{2}\right]_0^{x+1}=\frac{3x(x+1)^2}{34},\ 0<x<2$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^2\frac{3}{17}xy\,dx & 0<y<1\\ \int_{y-1}^2\frac{3}{17}xy\,dx & 1<y<3\end{cases}=\begin{cases}\frac{12y}{34} & 0<y<1\\ \frac{3y(3+2y-y^2)}{34} & 1<y<3\end{cases}$$

já que $\int_{y-1}^2\frac{3}{17}xy\,dx=\frac{3}{17}y\left(\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^2=\frac{3y\left(4-(y-1)^2\right)}{34}=\frac{3y\left(3+2y-y^2\right)}{34}$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_0^2\int_0^{x+1}\frac{3}{17}\,dy\,dx=\frac{3}{17}\int_0^2(x+1)\,dx=\frac{3}{17}\left(\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2=\frac{12}{17}.$$

$P(1<X<Y)=\int_1^2\int_x^{x+1}\frac{3}{17}xy\,dy\,dx$ Fazendo as contas vinha

$$P(1<X<Y)=\int_1^2\int_x^{x+1}\frac{3}{17}xy\,dy\,dx=\int_1^2\frac{3}{17}x\left(\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+1}dx=\int_1^2\frac{3}{34}x\left((x+1)^2-x^2\right)dx=\int_1^2\frac{3}{34}x\left(2x+1\right)dx$$

$$=\frac{3}{34}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{3}{34}\left(\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{34}\times\frac{32}{6}=\frac{8}{17}$$

b. **[5]** Obtenha $f_{Y|X}(y\,|\,1)$.

$$f_{Y|X}(y\,|\,1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}=\frac{(3/17)\,y}{(3/34)\,4}=\frac{y}{2},\ 0<y<2$$

5. **[10]** Sejam A e B dois acontecimentos de probabilidade não nula definidos no mesmo espaço de resultados Ω. Será que $P(A\,|\,B)\ge P(A)$ implica $P(B\,|\,A)\ge P(B)$? Responda fundamentando cuidadosamente a sua resposta.

Sabe-se que $P(A\,|\,B)\ge P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)\ge P(A)\times P(B)$ já que por definição $P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ e

$P(B)>0$

Logo

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ge\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$$

E portanto a implicação é verdadeira.

PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG 19.06.2018

1ª parte do exame EN

Nome:____**Número:**_________

Cotação: (**Espaço reservado para classificações**)

1a. (15)	**2a. (5)**	**3a.(10)**	**4.a (10)**	**5. (10)**
1b. (5)	**2b. (10)**	**3b.(15)**	**4.b (10)**	**6. (10)**

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Numa unidade industrial de grandes dimensões, o número médio diário de acidentes de trabalho é 0.2 por dia. Considere que o número de acidentes segue um processo de Poisson.
   a. **[15]** Qual a probabilidade de ocorrerem mais de 2 acidentes num período de 5 dias? Recalcule esta probabilidade sabendo que ocorreu um acidente nos 2 primeiros dias.

X_5 - nº de acidentes de trabalho em 5 dias $X_5 \sim Po(1)$

$$P(X_5 > 2) = 1 - P(X_5 \le 2) = 1 - 0.9197 = 0.0803$$

Seja X_2 o número de acidentes ocorridos nos 2 primeiros dias e X_{5-2} o número de acidentes ocorridos nos 3 últimos dias. Sabe-se que $X_2 \sim Po(0.4)$, $X_{5-2} \sim Po(0.6)$ e que X_2, X_{5-2} são independentes.

$$P(X_5 > 2 | X_2 = 1) = \frac{P(X_5 > 2 \wedge X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{P(X_2 = 1 \wedge X_{5-2} > 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{P(X_2 = 1) \times P(X_{5-2} > 1)}{P(X_2 = 1)}$$

$$= \frac{0.2681 \times (1 - 0.8781)}{0.2681} = 0.1219$$

Tirando partido da independência podia fazer-se

$$P(X_5 > 2 | X_2 = 1) = P(X_{5-2} > 1) = (1 - 0.8781) = 0.1219$$

   b. **[5]** Qual a probabilidade de o tempo decorrido entre dois acidentes consecutivos ser superior a dois dias e inferior a 5 dias?

Seja T o tempo (em dias) ocorrido entre 2 acidentes consecutivos. Sabe-se que $T \sim Ex(0.2)$

$$P(2 < T < 5) = \int_2^5 0.2 e^{-0.2x}\, dx = \left(-e^{-0.2x}\right]_2^5 = -e^{-1} + e^{-0.4} = -0.3679 + 0.6703 = 0.3024$$

2. Uma máquina de bebidas está regulada para servir, em média, 20 centilitros de refrigerante por dose. A quantidade (em centilitros) de refrigerante servida por dose segue uma distribuição normal com variância igual a 6.25.
   a. **[5]** Qual a percentagem de doses em que a quantidade de refrigerante servida é inferior a 18 centilitros?

$$P(X < 18) = 0.2119(maq)$$

$$= \Phi\left(\frac{18-20}{2.5}\right) = \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119(tabelas)$$

b. **[10]** Admita que a capacidade dos copos utilizados é de 23 centilitros. Num mês em que essa máquina vende 850 doses de refrigerante, em quantos copos se espera que o líquido venha a transbordar?

N número de copos (em 850) que se esperam vir a transbordar
$N \sim B(850, p)$ sendo

$$p = \mathrm{P}(X > 23) = 0.11507(maq)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{23-20}{2.5}\right) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151(tab)$$

$$E(N) = 850\, p = 87.835(tab)$$

3. A duração (em minutos) de uma chamada telefónica pode ser considerada uma variável aleatória com distribuição exponencial com média igual a 10 minutos.

a. **[10]** Para uma chamada que já se iniciou há 5 minutos, calcule a probabilidade de a sua duração não ultrapassar os 15 minutos.

X - duração (em minutos) de uma chamada telefónica $\qquad X \sim Ex(0.1)$

$$P(X \le 15 \mid X > 5) = P(X \le 10) \qquad \text{"falta de memória" da exponencial}$$
$$= \int_0^{10} 0.1 e^{-0.1x}\, dx = \left(-e^{-0.1x}\right]_0^{10} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

b. **[15]** Seleccionada uma amostra casual de 40 chamadas telefónicas, qual a probabilidade de a duração média na amostra ser superior a 11 minutos?

X_i duração da chamada i

$\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{40} X_i}{40}$ duração média de uma chamada numa amostra de 40

Ora $\sum_{i=1}^{40} X_i \sim G(40; 0.1)$ logo $Q = 0.2 \sum_{i=1}^{40} X_i = 8\bar{X} \sim \chi^2_{(80)}$

$P(\bar{X} > 11) = P(Q > 88) \approx 0.25$

4. O número de unidades vendidas diariamente de determinado produto é uma variável aleatória assumindo valores inteiros de média 3 e variância 4.

a. **[10]** Poder-se-á garantir que $P(X > 6)$ é inferior a 0.3? Responda justificadamente.

$E(X) = 3$, $\mathrm{var}(X) = 4$

$$P(X > 6) = P(X \ge 7) \qquad X \text{ é v.a. inteira}$$
$$= P(X - \mu \ge 4) \le P\left(|X - \mu| \ge 4\right) \le 0.25 \qquad \text{desigualdade de Chebyshev com } t = 2$$

e portanto pode-se garantir que $P(X > 6) < 0.3$

b. **[10]** Supondo que as vendas em dias diferentes são *iid*, obtenha a melhor aproximação possível para a probabilidade das vendas trimestrais (90 dias) serem inferiores ou iguais a 70.

Seja X_i o número de unidades vendidas no dia i e seja $Y=\sum_{i=1}^{90} X_i$ as vendas trimestrais. Aplicando o TLC vem $Z=\dfrac{\sum_{i=1}^{90} X_i - 90\mu}{\sigma\sqrt{90}} \overset{\circ}{\sim} N(0,1)$.

Assim $P(Y \le 70) \approx \Phi\left(\dfrac{70.5-90\times 3}{2\sqrt{90}}\right)=\Phi\left(-10.5146\right)\approx 0$

5. **[10]** Seja $\{X_n\}$, $n=1,2,\cdots$, uma sucessão de variáveis aleatórias tais que à variável X_n corresponde a função de distribuição $F_n(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ (x/\theta)^n & 0\le x<\theta \\ 1 & x\ge\theta \end{cases}$. Mostre que $X_n \xrightarrow{P} \theta$

Mostrar que $X_n \xrightarrow{P} \theta$ equivale a mostrar que $\forall \varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|X_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

$$\begin{aligned} P\left(\left|X_n-\theta\right|<\varepsilon\right) &= P(\theta-\varepsilon<X_n<\theta+\varepsilon) \\ &= F_n(\theta+\varepsilon)-F_n(\theta-\varepsilon) \qquad X_n \text{ é v.a. contínua} \\ &= 1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|X_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=\lim\limits_{n\to\infty} 1-\left(\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n=1$ já que $\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}<1$.

6. **[10]** Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente. Prove que $Y=X_1+X_2$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ justificando os passos do seu raciocínio.

Sabe-se que $M_{X_1}(s)=\exp(\lambda_1(e^s-1))$ e que $M_{X_2}(s)=\exp(\lambda_2(e^s-1))$

Como X_1, X_2 são independentes

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= \exp(\lambda_1(e^s-1))\times\exp(\lambda_2(e^s-1))=\exp\left(\lambda_1(e^s-1)+\lambda_2(e^s-1)\right) \\ &= \exp\left((\lambda_1+\lambda_2)(e^s-1)\right)=\exp\left(\lambda(e^s-1)\right) \qquad \text{com } \lambda=\lambda_1+\lambda_2 \end{aligned}$$

sendo $M_Y(s)$ a f.g.m. de uma Poisson de parâmetro λ e portanto $Y \sim Po(\lambda)$